

Chapitre 1

Etudier la mécanique

EPFL

1.1 Introduction

- 1.1.1 Structure
- 1.1.2 Chapitres
- 1.1.4 Histoire
- 1.1.5 Objectifs
- 1.1.6 Limites
- 1.1.7 Expériences

1.2 Calcul différentiel

- 1.2.1 Dérivées de fonctions
- 1.2.2 Dérivées de compositions de fonctions
- 1.2.3 Développements limités de fonctions

1.3 Calcul vectoriel

- 1.3.1 Repère direct
- 1.3.2 Produit scalaire
- 1.3.3 Produit vectoriel
- 1.3.4 Produit mixte
- 1.3.5 Identité vectorielle

1.1 Introduction

1.1.1 Structure

1.1.2 Chapitres

1.1.4 Histoire

1.1.5 Objectifs

1.1.6 Limites

1.1.7 Expériences

- **14 chapitres** (théorie, expériences, applications)
- **14 séances d'exercices**
- **10 séances de soutien** dès la semaine 4
- **Moodle (EPFL)** : PHYS-101(f)

<https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14237>

- **Warm Up Mooc - EPFL** :

<https://www.swissmooc.ch/courses/warm-up/>

- **Livre de cours** :

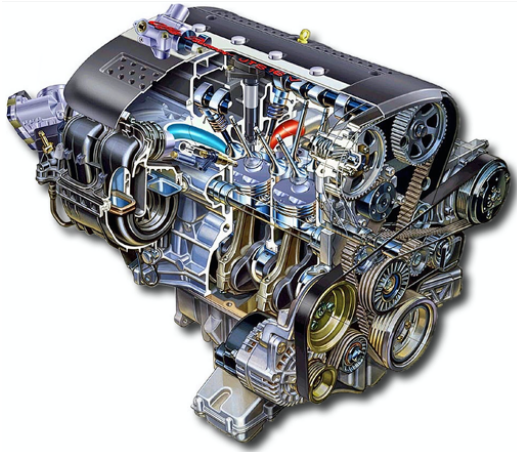
Mécanique

J.-Ph. Ansermet

EPFL Press

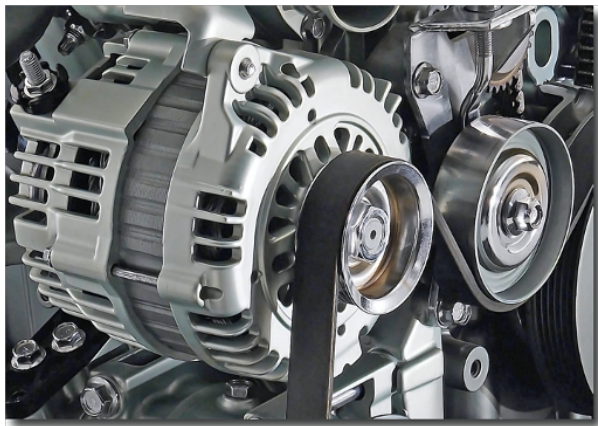


- ① Introduction et outils mathématiques
- ② Cinématique et dynamique du point matériel
- ③ Frottements et balistique
- ④ Oscillateur harmonique et mouvement circulaire
- ⑤ Coordonnées cylindriques, sphériques et rotations
- ⑥ Contraintes, puissance, travail et énergie cinétique
- ⑦ Energie potentielle, énergie mécanique et résonance
- ⑧ Loi d'action-réaction, collisions
- ⑨ Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation
- ⑩ Système de masse variable et référentiels accélérés
- ⑪ Dynamique terrestre, pendule de Foucault et syst. de pts matériels
- ⑫ Cinématique et dynamique du solide indéformable
- ⑬ Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes
- ⑭ Mécanique classique et mécanique quantique



1 Mécanique (grec “Μηχανικη”)

- Equilibre (statique)
- Mouvement (dynamique)
- Déformation



2 Etude de la mécanique

- Raison historique
- Raison méthodologique et pédagogique

Aristote

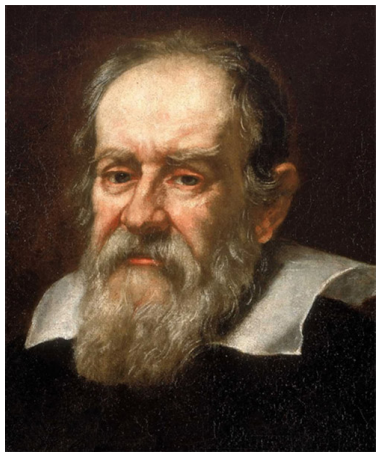
384 – 325 av. J.-C.



- 1 **Dichotomie** : mouvement parfait des corps célestes \leftrightarrow mouvement corrompu des corps terrestres
- 2 **Méthodologie non-scientifique** : pas d'interaction entre théorie et expérience

Galileo Galilei

1564 – 1642



- 1 **Expérience** : interroger la nature (méthodologie scientifique)
- 2 **Théorie** : langage mathématique

Johannes Kepler

1571 – 1630



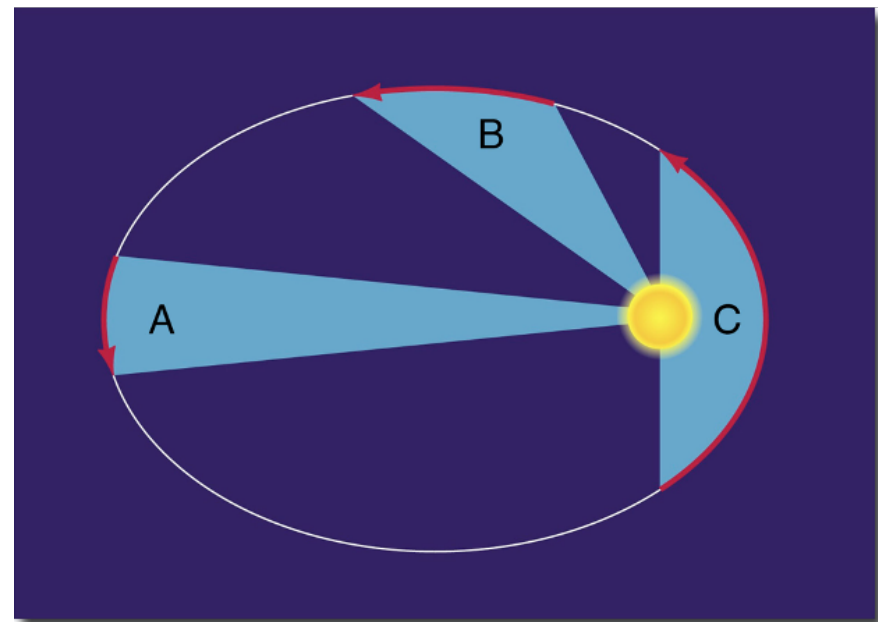
Tycho Brahé

1546 – 1601



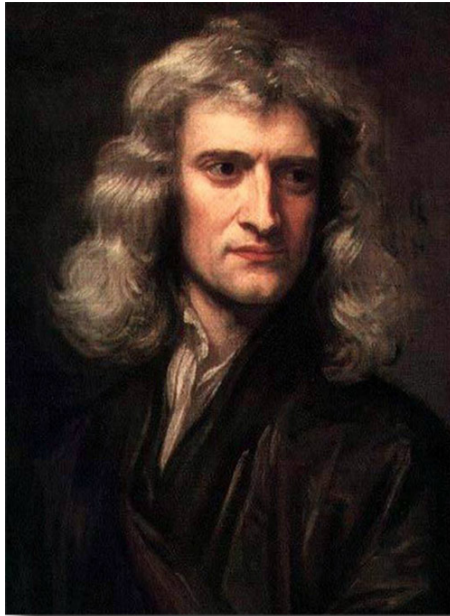
Mécanique céleste : 3 lois

- 1 **Loi des orbites :**
ellipse, soleil = foyer
- 2 **Loi des aires :**
aire/temps = constante
- 3 **Loi des périodes :**
 $\text{période}^2 / \text{demi grand-axe}^3 = \text{constante}$



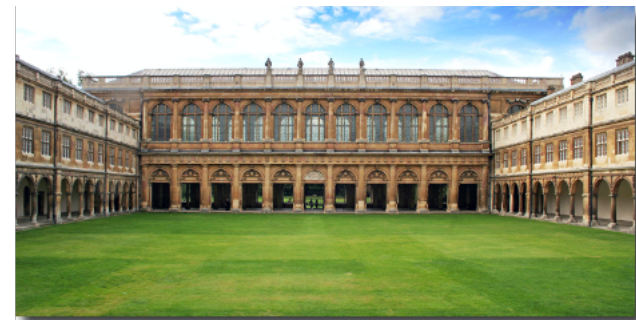
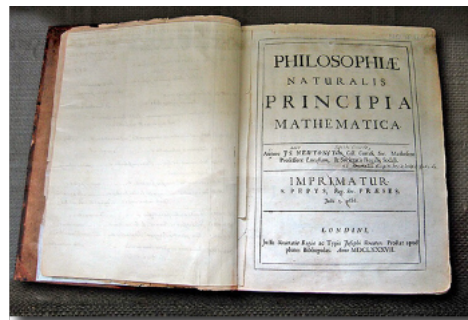
Sir Isaac Newton

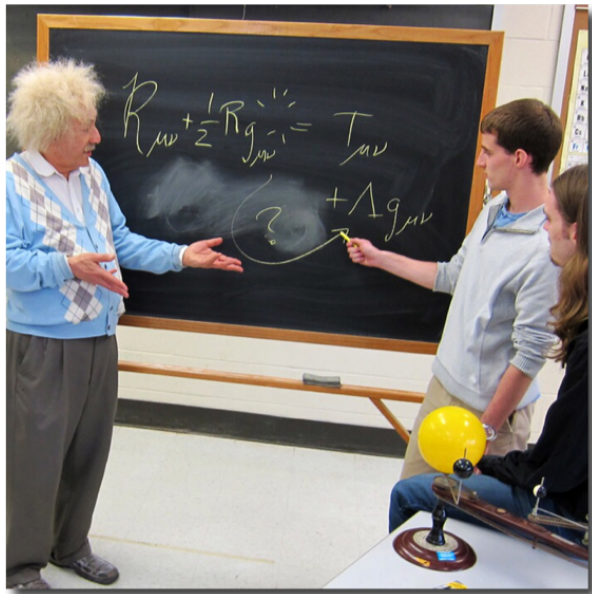
1643 – 1727



Mécanique classique : céleste et terrestre

- 1 **Théorie physique :**
Lois de la mécanique (3 lois)
- 2 **Théorie mathématique :**
Calcul différentiel et intégral





- 1 Modéliser conceptuellement un phénomène physique
- 2 Transcrire mathématiquement le modèle physique
- 3 Appliquer des lois physiques et résoudre un système d'équations
- 4 Apprendre à connaître les limites des modèles et des théories
- 5 Développer un savoir-faire par la résolution de problèmes
- 6 Adopter une approche systématique
- 7 Maîtriser les outils mathématiques dans le contexte de la physique
- 8 Découvrir les mathématiques par la physique

Henri Poincaré

1854 – 1912



- **Mécanique classique** : théorie universelle fin XVII^e siècle → fin XIX^e siècle
 - **Mécanique classique** : remise en cause fin XIX^e siècle et début XX^e siècle
- 1 **Théorie du chaos** :
Poincaré 1889 et Lorenz 1960
 - 2 **Relativité restreinte** :
Einstein 1905
 - 3 **Mécanique quantique** :
Schrödinger, Heisenberg 1925

Déterminisme - Marquis de Laplace à l'Empereur Napoléon Bonaparte

Sire, donnez-moi les conditions initiales et je vous prédurai l'évolution du monde.



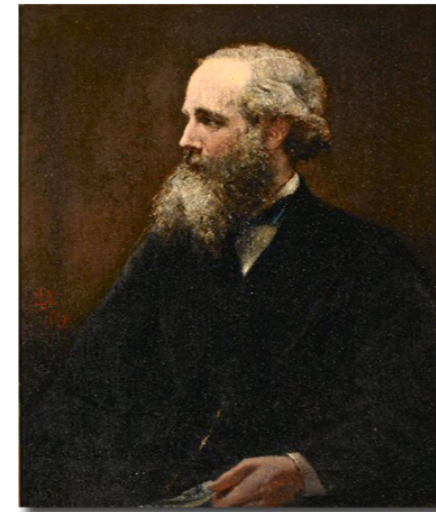
- 1 **Importance historique :**
décrire les phénomènes physiques
- 2 **Importance symbolique :**
rester dans l'interrogation de la nature
- 3 **Importance méthodologique :**
repérer le passage du réel au modèle
- 4 **Importance didactique :**
lien entre enseignement et vie quotidienne,
curiosité scientifique

Théorie et expérience



Je n'ai pas de raison de penser que l'intelligence humaine soit capable de conceptualiser les lois physiques en se basant uniquement sur ses propres ressources sans faire appel aux résultats expérimentaux. De telles tentatives se sont toujours soldées par des théories artificielles et pleines de contradictions.

James Clerk Maxwell
1831 – 1879

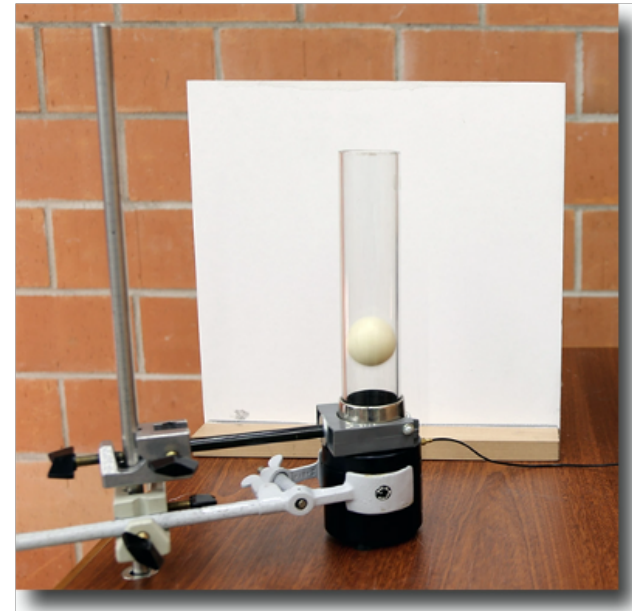
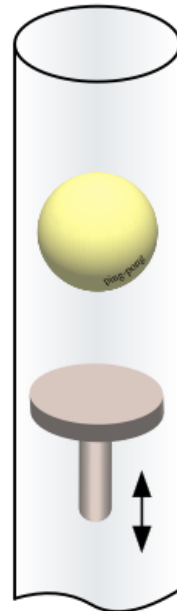




- La toupie est un aimant qui, lorsqu'il est en rotation au-dessus d'un autre aimant d'aimentation opposée est soumis à une force magnétique répulsive. Cette force magnétique répulsive compense son poids et permet à la toupie de léviter...



- Le verre est excité acoustiquement à l'aide d'un haut-parleur à sa fréquence de résonance. Il est d'abord déformé, puis il se casse...



- 1 **Pendules articulés** : si deux pendules articulés sont lancés avec des amplitudes initiales comparables et suffisamment importantes, leurs mouvements se désynchronisent rapidement (sensibilité aux conditions initiales).
- 2 **Balle de ping-pong** : une balle de ping-pong rebondit sur une plateforme astreinte à un mouvement périodique bien déterminé. Lorsque le tube est ouvert, la fréquence des rebonds est aléatoire (chaotique). Avec le frottement imposé par le bouchon, le mouvement devient périodique.

1.2 Calcul différentiel

1.2.1 Dérivées de fonctions

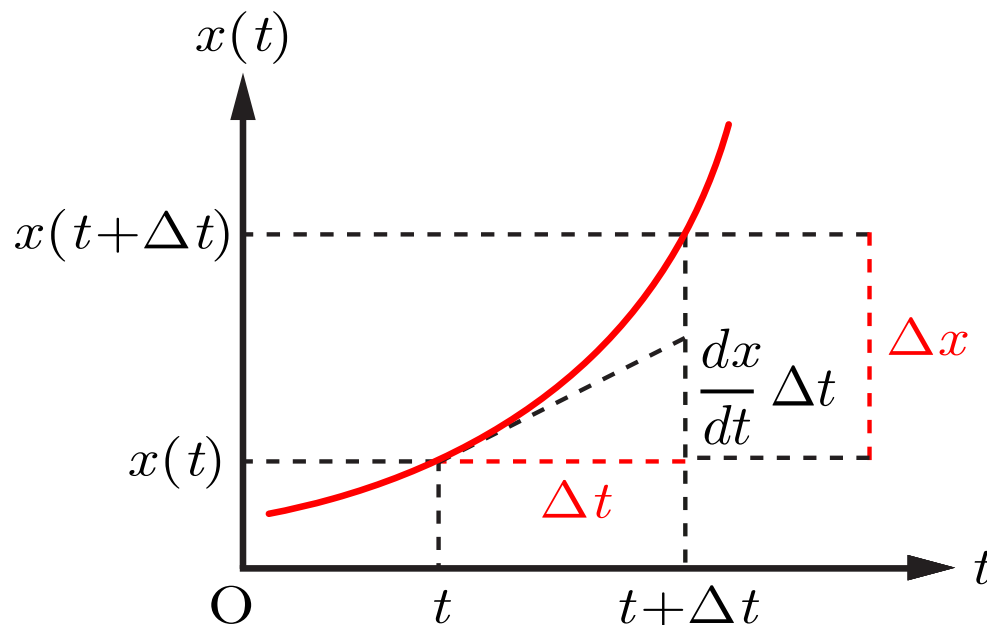
1.2.2 Dérivées de compositions de fonctions

1.2.3 Développements limités de fonctions

- **Dérivée** : on appelle dérivée la limite infinitésimale du rapport de la variation d'une fonction et de la variation de sa variable.
- ① **Vitesse** : dérivée de la position $x(t)$ par rapport au temps t :

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (1.1)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t + dt) - x(t)}{dt} \quad \text{ainsi} \quad dx = v dt \quad (1.2)$$



Graphiquement, la vitesse $v(t)$ est la pente de la position $x(t)$ au temps t .

2 **Accélération** : dérivée de la vitesse $v(t)$ par rapport au temps t :

$$a(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad (1.3)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v(t + dt) - v(t)}{dt} \quad \text{ainsi} \quad dv = a dt \quad (1.4)$$

$$a(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \right)}{\Delta t} = \frac{d \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)}{dt} \quad (1.5)$$

$$a = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \left(\frac{d}{dt} \right)^2 x = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1.6)$$

3 **Dérivée temporelle** (notation de physicien) :

$$v = \dot{x} \quad (1.7)$$

$$a = \dot{v} = \ddot{x} \quad (1.8)$$

- **Composition de fonctions** : $h(t) \equiv (f \circ g)(t) = f(g(t))$ (1.9)

1 **Dérivée de $g(t)$:**

$$\frac{dg}{dt} = \frac{g(t+dt) - g(t)}{dt} \quad \text{ainsi} \quad g(t+dt) = g(t) + dg \quad (1.10)$$

2 **Dérivée de $f(g)$:**

$$\frac{df}{dg} = \frac{f(g+dg) - f(g)}{dg} \quad \text{ainsi} \quad f(g+dg) = f(g) + \underbrace{\frac{df}{dg} dg}_{= df} \quad (1.11)$$

3 **Dérivée de $h(t) = f(g(t))$:**

$$\begin{aligned} \frac{dh(t)}{dt} &= \frac{f(g(t+dt)) - f(g(t))}{dt} \stackrel{(1.10)}{=} \frac{f(g(t) + dg) - f(g(t))}{dt} \\ &\stackrel{(1.11)}{=} \frac{\cancel{f(g(t))} + \frac{df}{dg} dg - \cancel{f(g(t))}}{dt} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d(f \circ g)}{dt} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dt} \quad (1.13)$$

- Exemples physiques :

- 1 Dérivée de la position : oscillateur harmonique

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.14)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(A \cos(\omega t + \varphi))}{d(\omega t + \varphi)} \frac{d(\omega t + \varphi)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.15)$$

- 2 Dérivée de l'énergie cinétique d'un objet de masse m :

$$T(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (1.16)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2\right)}{d\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} = \underbrace{m \ddot{x}}_{\text{force}} \underbrace{\dot{x}}_{\text{vitesse}} \quad (1.17)$$

- Dérivée de la fonction $f(x)$ par rapport à x :

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.18)$$

- Identité infinitésimale :

$$f(x + dx) \stackrel{(1.18)}{=} f(x) + \frac{df}{dx} dx \quad (1.19)$$

- Approximation $\Delta x \ll x$:

$$\frac{df}{dx} \simeq \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.20)$$

$$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \frac{df}{dx} \Delta x \quad (1.21)$$



- La relation (1.21) est le **développement limité** (ou de Taylor) au 1^{er} ordre en Δx de $f(x + \Delta x)$ autour de x .

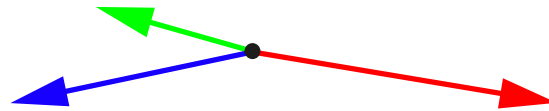
1.3 Calcul vectoriel

- 1.3.1 Repère direct
- 1.3.2 Produit scalaire
- 1.3.3 Produit vectoriel
- 1.3.4 Produit mixte
- 1.3.5 Identité vectorielle

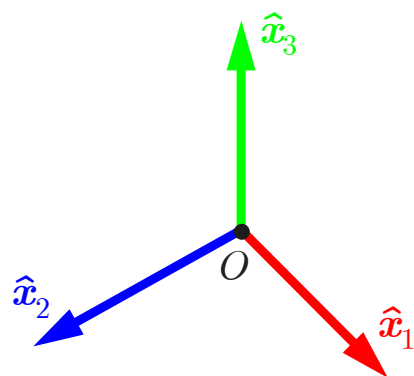
- **Vecteur** : élément de droite orientée (norme, orientation)



- **Repère** : entité géométrique constituée de trois vecteurs linéairement indépendants attaché à un point (origine).

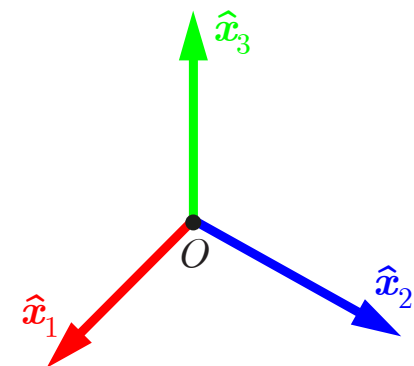


- **Repère orthonormé** : les vecteurs de base sont orthogonaux et de norme unité (deux types)



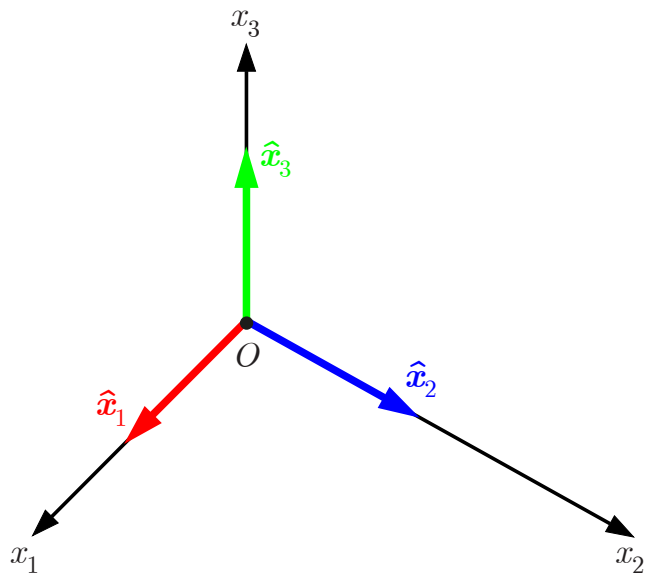
Repère indirect

Miroir

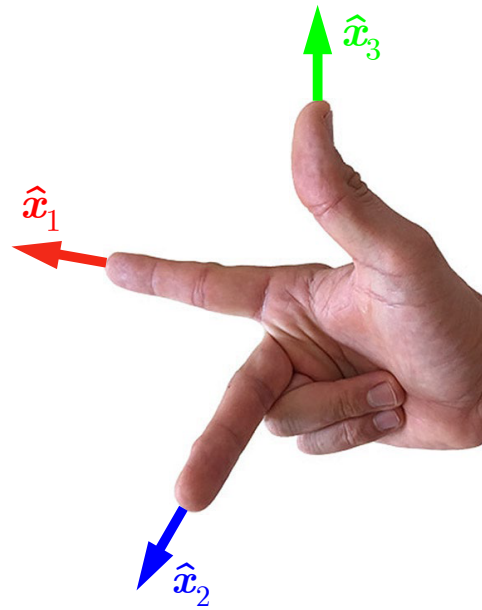


Repère direct

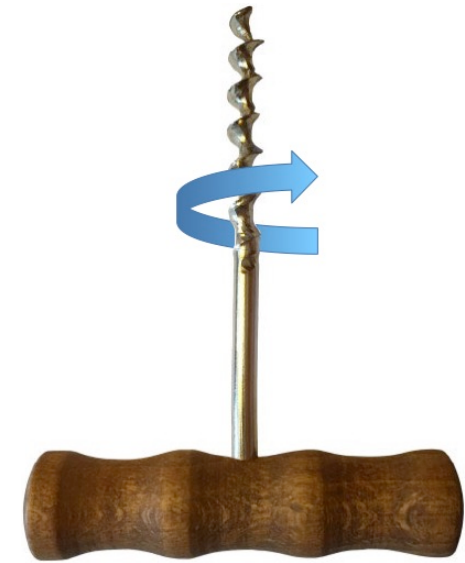
- **Repère direct** : un repère direct est un repère orthonormé dont les vecteurs de base satisfont la règle de la main droite ou la règle du tire-bouchon ($\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$).



Repère direct



Règle de la main droite



Règle du tire-bouchon

- **Produit scalaire** : scalaire obtenu par produit symétrique des coordonnées identiques de deux vecteurs exprimés par rapport à un repère direct $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$.

$$\mathbf{a} = a_1 \hat{x}_1 + a_2 \hat{x}_2 + a_3 \hat{x}_3 \quad (1.22)$$

$$\mathbf{b} = b_1 \hat{x}_1 + b_2 \hat{x}_2 + b_3 \hat{x}_3$$

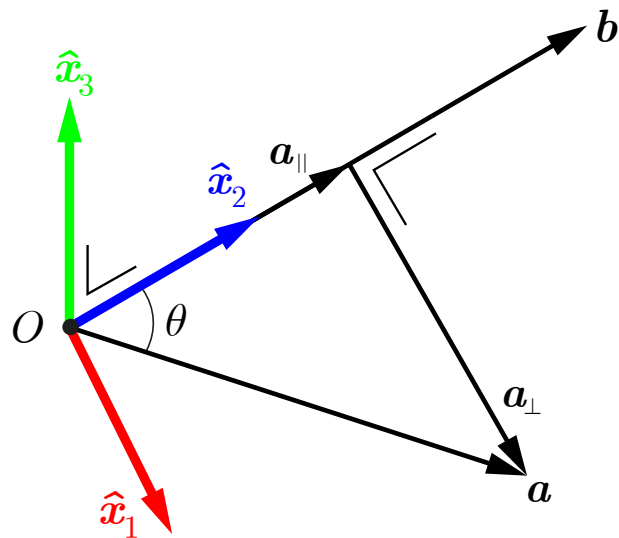
- **Expression mathématique** :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (1.23)$$

① **commutatif** : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (1.24)

② **vecteurs de base** : $\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, 3$ (1.25)

$$\text{où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.26)$$



- Décomposition du vecteur a :

$$a = a_{\parallel} + a_{\perp} \quad (1.27)$$

- Vecteurs a et b :

$$a = \|a\| \sin \theta \hat{x}_1 + \|a\| \cos \theta \hat{x}_2$$

$$b = \|b\| \hat{x}_2 \quad (1.28)$$

où $\|a\| \equiv$ norme du vecteur a
 $\|b\| \equiv$ norme du vecteur b

- Produit scalaire (1.23) compte tenu de (1.25) :

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \theta \quad (1.29)$$

- Vecteurs a_{\parallel} et a_{\perp} :

$$a_{\parallel} = \|a\| \cos \theta \hat{x}_2 \quad \text{et} \quad a_{\perp} = \|a\| \sin \theta \hat{x}_1 \quad (1.30)$$

- Propriétés du produit scalaire :

$$\textcircled{1} \quad a \cdot a = \|a\|^2 \quad \textcircled{2} \quad a_{\parallel} \cdot b = a \cdot b \quad \textcircled{3} \quad a_{\perp} \cdot b = 0 \quad (1.31)$$

- **Produit vectoriel** : vecteur obtenu par produit antisymétrique des coordonnées différentes de deux vecteurs et d'un autre vecteur de base d'un repère direct $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3)$.

$$\mathbf{a} = a_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (1.22)$$

$$\mathbf{b} = b_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + b_3 \hat{\mathbf{x}}_3$$

- **Expression mathématique** :

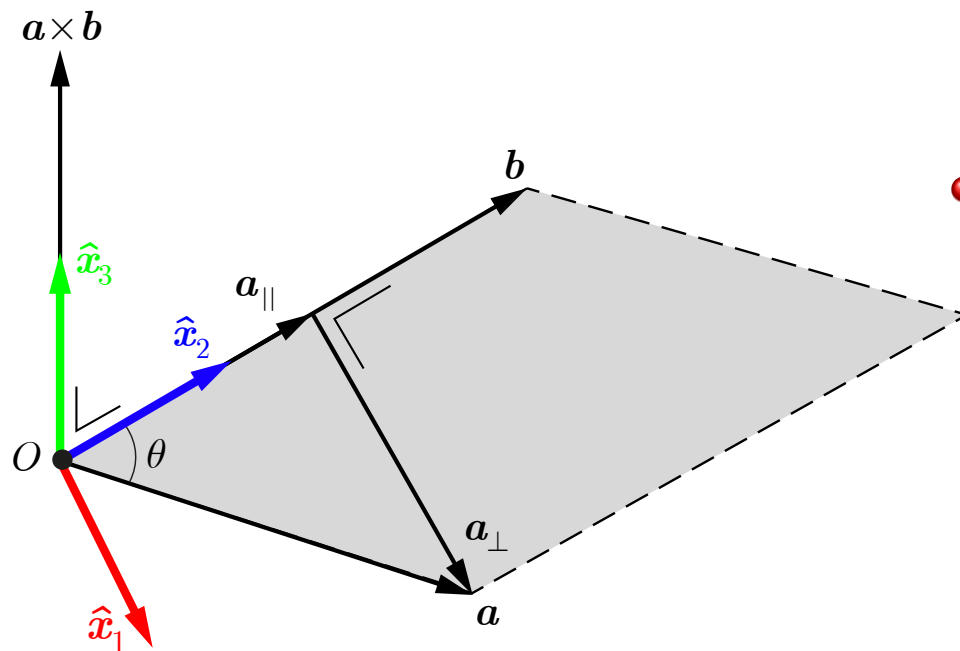
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{\mathbf{x}}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{\mathbf{x}}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (1.32)$$

$$\textcircled{1} \text{ anticommutatif : } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (1.33)$$

$$\textcircled{2} \text{ vecteurs de base : } \hat{\mathbf{x}}_i \times \hat{\mathbf{x}}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{x}}_k \quad \forall i, j, k = 1, 2, 3 \quad (1.34)$$

$$\text{où } \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{pour } \varepsilon_{123}, \varepsilon_{231}, \varepsilon_{312} \\ -1 & \text{pour } \varepsilon_{321}, \varepsilon_{213}, \varepsilon_{132} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.35)$$

$$\textcircled{3} \text{ non-associatif : } \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \quad (1.36)$$



- Décomposition du vecteur a :

$$a = a_{\parallel} + a_{\perp} \quad (1.27)$$

- Vecteurs a et b :

$$a = \|a\| \sin \theta \hat{x}_1 + \|a\| \cos \theta \hat{x}_2$$

$$b = \|b\| \hat{x}_2 \quad (1.28)$$

où $\|a\| \equiv$ norme du vecteur a
 $\|b\| \equiv$ norme du vecteur b

- Produit vectoriel (1.32) compte tenu de (1.34) :

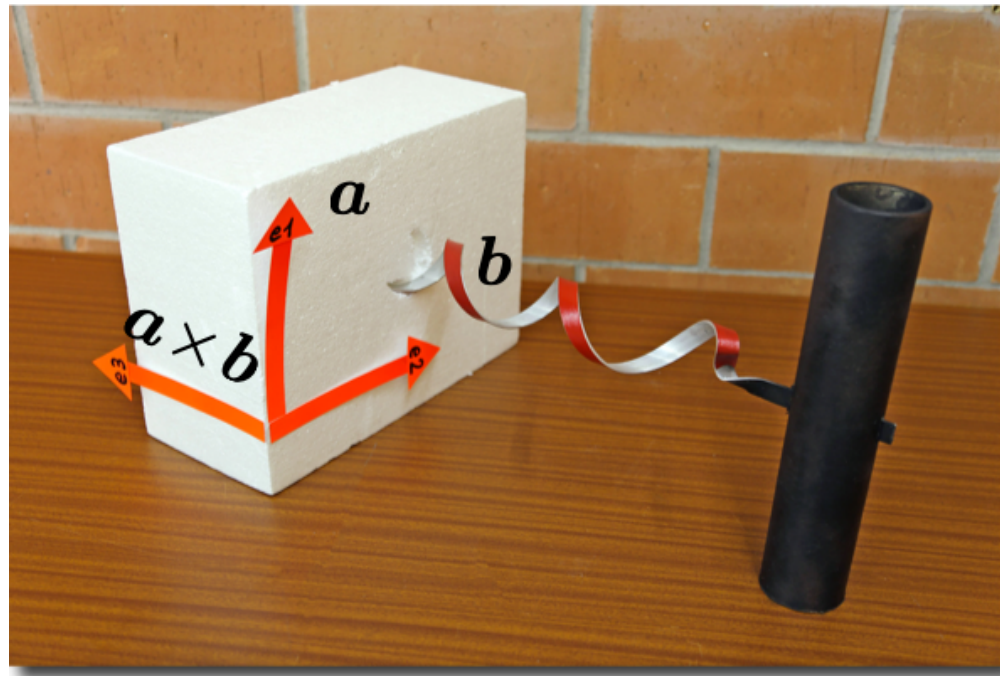
$$a \times b = \|a\| \|b\| \sin \theta \hat{x}_3 \quad (1.37)$$

- Vecteurs a_{\parallel} et a_{\perp} :

$$a_{\parallel} = \|a\| \cos \theta \hat{x}_2 \quad \text{et} \quad a_{\perp} = \|a\| \sin \theta \hat{x}_1 \quad (1.30)$$

- Propriétés du produit vectoriel :

$$\textcircled{1} \quad a \times a = 0 \quad \textcircled{2} \quad a_{\parallel} \times b = 0 \quad \textcircled{3} \quad a_{\perp} \times b = a \times b \quad (1.38)$$



- En tournant le manche du tire-bouchon dans le sens des aiguilles d'une montre du vecteur a vers le vecteur b , on le visse dans la direction du vecteur $a \times b$.
- En tournant le manche du tire-bouchon dans le sens trigonométrique du vecteur b vers le vecteur a , on le dévisse dans la direction du vecteur $b \times a = -a \times b$.

- **Produit mixte** : produit scalaire de deux vecteurs dont l'un est obtenu par produit vectoriel de deux vecteurs.

$$\mathbf{a} = a_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{x}}_3$$

$$\mathbf{b} = b_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + b_3 \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (1.39)$$

$$\mathbf{c} = c_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + c_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + c_3 \hat{\mathbf{x}}_3$$

- **Expression mathématique** :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \quad (1.40)$$

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3$$

$$\textcircled{1} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

$$\textcircled{2} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (1.41)$$

- **Double produit vectoriel** : produit vectoriel de deux vecteurs dont l'un est obtenu par produit vectoriel de deux vecteurs.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = & \left(a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3) \right) \hat{\mathbf{x}}_1 \\ & + \left(a_3 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \right) \hat{\mathbf{x}}_2 \\ & + \left(a_1 (b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2 (b_2 c_3 - b_3 c_2) \right) \hat{\mathbf{x}}_3 \end{aligned} \quad (1.42)$$

- **Vecteur** : antisymétrique par permutation de \mathbf{b} et \mathbf{c} et orthogonal à $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = & \left((\cancel{a_1 e_1} + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_1 - (\cancel{a_1 b_1} + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_1 \right) \hat{\mathbf{x}}_1 \\ & + \left((a_1 c_1 + \cancel{a_2 e_2} + a_3 c_3) b_2 - (a_1 b_1 + \cancel{a_2 b_2} + a_3 b_3) c_2 \right) \hat{\mathbf{x}}_2 \\ & + \left((a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cancel{a_3 e_3}) b_3 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cancel{a_3 b_3}) c_3 \right) \hat{\mathbf{x}}_3 \end{aligned} \quad (1.43)$$

- **Identité vectorielle** :

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (1.44)$$